УДК 02.29.19

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

И.М.ГУСЕЙНОВ, Л.И.МАММАДОВА

Бакинский Государственный Университет

Институт математики и механики НАН Азербайджана

hmhuseynov@gmail.com, leylaim@yahoo.com

Статья посвящена изучению основных свойств собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с граничными условиями Дирихле с условиями разрыва во внутренней точке рассматриваемого промежутка. Условие разрыва содержит спектральный параметр. Доказана вещественность и простота и получена асимптотика собственных значений.

Ключевые слова: *оператор Штурма-Лиувилля, условия разрыва, собственные значения*

В настоящей работе рассматривается краевая задача L для дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{1}$$

на отрезке $[0, \pi]$ с граничными условиями Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{2}$$

и с условиями разрыва в точке $x = a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$\begin{aligned} y'(a+0) - y'(a-0) &= \lambda\beta y(a), \\ y(a+0) - y(a-0) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где λ − вещественный параметр, $q(x)$ − действительная функция, принадлежащая пространству $L_2[0, \pi]$, и β − вещественное число. Изучаются свойства собственных значений этой задачи.

В дальнейшем будем предполагать, что для всех функций $y(x) \in W_2^2(\Omega)$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (2)-(3), выполняется неравенство

$$\int_0^\pi \left\{ |y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2 \right\} dx > 0 \,, \tag{4}$$

где $\Omega = [0,\pi] \setminus \{a\}$. Заметим, что это неравенство заведомо выполняется, если $q(x) > 0$.

Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала связаны с разрывными или негладкими свойствами среды и появляются, например, в радиоэлектронике и в различных геофизических моделях земного шара $[1-2]$. Спектральные задачи (на отрезке и на полуоси) для дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами, с особенностью и условиями разрыва во внутренней точке рассматриваемого промежутка исследовались в $[3-8]$ и других работах. Отметим, что задача с условиями вида (3) ранее не рассматривалась.

Характеристической функцией краевой задачи L (квадраты нулей которой совпадают с собственными значениями этой задачи) является целая функция $\Delta(\lambda) = s(\pi,\lambda)$, где $s(x,\lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda) = 0$, $s'(0,\lambda) = 1$. Легко показать, что краевая задача L имеет счетное множество собственных значений.

Лемма 1. *Собственные значения краевой задачи* L *вещественны и отличны от нуля.*

Доказательство. Пусть λ собственное значение задачи L и $y(x,\lambda)$ – соответствующая собственная функция, нормированная условием $\int_0^\pi |y(x,\lambda)|^2 dx = 1$. Умножая обе части равенства (1) на $\overline{y(x,\lambda)}$ и интегрируя полученное тождество по x от 0 до π, имеем

$$-\int_0^\pi y''(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)}dx + \int_0^\pi q(x)|y(x,\lambda)|^2 dx = \lambda^2 \int_0^\pi |y(x,\lambda)|^2 dx \,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$-y'(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)}\Big|_0^{a-0} - y'(x,\lambda)\overline{y(x,\lambda)}\Big|_{a+0}^{\pi} +$$
$$+\int_0^\pi \left(|y'(x,\lambda)|^2 + q(x)|y(x,\lambda)|^2 \right) dx = \lambda^2 \int_0^\pi |y(x,\lambda)|^2 dx \,.$$

В силу (2) имеем

$$-y'(a-0)\overline{y(a-0)} + y'(a+0)\overline{y(a+0)} + \int_0^\pi \left(|y'(x,\lambda)|^2 + q(x)|y(x,\lambda)|^2 \right) dx = \lambda^2 \,.$$

Используя условия склейки (3), получаем, что

$$\lambda^2-\lambda\beta|y(a,\lambda)|^2-\int_0^\pi\left(|y'(x,\lambda)|^2+q(x)|y(x,\lambda)|^2\right)dx=0,$$

откуда

$$\lambda=\frac{1}{2}\left\{\beta|y(a,\lambda)|^2\pm\sqrt{\beta^2|y(a,\lambda)|^4+4\int_0^\pi\left(|y'(x,\lambda)|^2+q(x)|y(x,\lambda)|^2\right)dx}\right\}.$$

Из этого равенства в силу условия (4) следует утверждение леммы 1.

В дальнейшем точкой над функцией будем обозначать производную функции по параметру λ.

Лемма 2. *Собственные значения краевой задачи L простые.*

Доказательство. Дифференцируя по λ равенство

$$-s''\left(x,\sqrt{\lambda}\right)+q(x)s\left(x,\sqrt{\lambda}\right)=\lambda s\left(x,\sqrt{\lambda}\right), \tag{5}$$

имеем

$$-\dot{s}''\left(x,\sqrt{\lambda}\right)+q(x)\dot{s}\left(x,\sqrt{\lambda}\right)=s\left(x,\sqrt{\lambda}\right)+\lambda\dot{s}\left(x,\sqrt{\lambda}\right).$$

Далее, умножая это равенство на $s\left(x,\sqrt{\lambda}\right)$, а соотношение (5) – на $\dot{s}\left(x,\sqrt{\lambda}\right)$, вычитая, а затем интегрируя по x в пределах $[0,\pi]$, при вещественном λ получаем

$$\int_0^\pi s^2\left(x,\sqrt{\lambda}\right)dx=\dot{s}\left(a-0,\sqrt{\lambda}\right)s'\left(a-0,\sqrt{\lambda}\right)-\dot{s}\left(a+0,\sqrt{\lambda}\right)s'\left(a+0,\sqrt{\lambda}\right)-$$
$$-\dot{s}'\left(a-0,\sqrt{\lambda}\right)s\left(a-0,\sqrt{\lambda}\right)+$$
$$+\dot{s}'\left(a+0,\sqrt{\lambda}\right)s\left(a+0,\sqrt{\lambda}\right)+\dot{s}\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right)s'\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right)-\dot{s}'\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right)s\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right).$$

Отсюда согласно (3) имеем

$$\int_0^\pi s^2\left(x,\sqrt{\lambda}\right)dx=\dot{s}\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right)s'\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right)-\dot{s}'\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right)s\left(\pi,\sqrt{\lambda}\right).$$

Если $\lambda=\lambda^*$ является собственным значением задачи L, то из последнего соотношения следует, что $0<\int_0^\pi s^2\left(x,\sqrt{\lambda^*}\right)dx=\dot{\Delta}\left(\sqrt{\lambda^*}\right)s'\left(\pi,\sqrt{\lambda^*}\right)$. Следовательно, $\dot{\Delta}\left(\sqrt{\lambda^*}\right)\neq 0$, т.е. нули функции $\Delta\left(\sqrt{\lambda}\right)$ простые. Лемма 2 доказана.

Обозначим через $\Delta_0(\lambda)$ характеристическую функцию краевой задачи L при $q(x)\equiv 0$. Легко устанавливается, что

$$\Delta_0(\lambda)=\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}-\beta\frac{\cos\lambda\pi-\cos\lambda(2a-\pi)}{2\lambda}. \tag{6}$$

Ниже нам понадобятся следующие две леммы, доказательства которых аналогичны доказательствам соответствующих утверждений статьи [9].

Лемма 3. *Нули* λ_n^0 *функции* $\Delta_0(\lambda)$ *отделены, т.е.*

$$\inf_{n\neq k}\left|\lambda_n^0-\lambda_k^0\right|=r>0.$$

Обозначим $G_\delta=\left\{\lambda:\left|\lambda-\lambda_n^0\right|\geq\delta\right\}$, где δ – достаточно малое положительное число: $\delta<<\frac{r}{2}$.

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$\left|\Delta_0(\lambda)\right|\geq C_\delta\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi},\lambda\in G_\delta. \qquad (7)$$

Теорема. *Собственные значения* $\lambda_n, n=1,2,\ldots$, *краевой задачи* L *при* $n\to\infty$ *удовлетворяют асимптотической формуле*

$$\sqrt{\lambda_n}=\lambda_n^0+\frac{b_n}{\lambda_n^0}+\frac{\alpha_n}{n}, \qquad (8)$$

где

$$b_n=\frac{1}{4\lambda_n^0\dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)}\left[(2-\beta i)\cos\lambda_n^0\pi\int_0^\pi q(s)ds-\beta i\left(\int_a^\pi q(s)ds-\int_0^a q(s)ds\right)\cos\lambda_n^0(2a-\pi)\right]-$$

ограниченная последовательность, $\{\alpha_n\}\in l_2$.

Доказательство. Согласно работе $[10]$ для функции $s(\lambda,x)$ имеет место следующее представление:

$$s(x,\lambda)=s_0(x,\lambda)+\int_0^x A(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt,$$

где
$$s_0(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda x}{\lambda}, & x<a,\\ \dfrac{\sin\lambda x}{\lambda}-\beta\dfrac{\cos\lambda x-\cos\lambda(2a-x)}{2\lambda}, & x>a,\end{cases}$$

$A(x,t)$– непрерывная функция (при $t\neq 2a-x$) с той же гладкостью, что и функция $\int_0^x q(t)dt$; кроме того,

$$A(x,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x q(s)ds, & 0\leq x<a,\\ \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\beta i}{4}\right)\displaystyle\int_0^x q(s)ds, & a<x\leq\pi,\end{cases} \qquad (9)$$

$$A(x,2a-x+0)-A(x,2a-x-0)=\frac{\beta i}{4}\left(\int_a^x q(s)ds-\int_0^a q(s)ds\right),\quad a<x\le\pi. \qquad (10)$$

Подставив в это представление $x=\pi$, имеем

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\int_0^\pi A(\pi,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt. \qquad (11)$$

В силу леммы 1.3.1 книги [11] из (11) получаем

$$\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}\right),\ |\lambda|\to\infty. \qquad (12)$$

Обозначим $\tilde{A}_n=\left\{\lambda:|\lambda|=\left|\lambda_n^0\right|+\frac{r}{2}\right\}$. Согласно соотношениям (7) и (12) на неограниченно расширяющихся контурах $\tilde{A}_n$ при достаточно большом n имеет место неравенство $|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)|<|\Delta_0(\lambda)|$. Поэтому из тождества $\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\{\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\}$, согласно теореме Руше следует, что существует такое натуральное число n_0, что при $n\ge n_0$ внутри контура $\tilde{A}_n$ лежит одинаковое число нулей функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$. Применяя теперь теорему Руше к кругу $\gamma_n(\delta)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\lambda_n^0\right|\le\delta\right\}$ заключаем, что при достаточно больших n в $\gamma_n(\delta)$ лежит ровно один нуль функции $\Delta(\lambda)$, а именно $\sqrt{\lambda_n}$. В силу произвольности $\delta>0$ имеем

$$\sqrt{\lambda_n}=\lambda_n^0+\varepsilon_n, \qquad (13)$$

где $\varepsilon_n=o(1)$, $n\to\infty$. Согласно работе [12] имеет место $\lambda_n^0=n+h_n$, $\sup_n|h_n|=h<\infty$. Поэтому из (13) следует, что

$$\sqrt{\lambda_n}=n+H_n,\ \sup_n|H_n|=H<\infty. \qquad (14)$$

Подставляя правую часть соотношения (13) в (11), получаем

$$\begin{aligned}
&2[\sin\lambda_n^0\pi\cdot\cos\varepsilon_n\pi+\cos\lambda_n^0\pi\cdot\sin\varepsilon_n\pi]-\beta\\
&[\cos\lambda_n^0\pi\cdot\cos\varepsilon_n\pi-\sin\lambda_n^0\pi\cdot\sin\varepsilon_n\pi-\\
&-\cos\lambda_n^0(2a-\pi)\cdot\cos\varepsilon_n(2a-\pi)+\sin\lambda_n^0(2a-\pi)\cdot\sin\varepsilon_n(2a-\pi)]\\
&=-2\int_0^\pi A(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)tdt,
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_n\,[2\pi\cos\lambda_n^0\pi+\beta\pi\sin\lambda_n^0\pi-\beta(2a-\pi)\sin\lambda_n^0(2a-\pi)]\\
&+2\sin\lambda_n^0\pi-\beta\cos\lambda_n^0\pi+
\end{aligned}$$

$$+\beta\cos\lambda_n^0(2a-\pi)+O(\varepsilon_n^2)=-2\int_0^\pi A(\pi,t)\sin(\lambda_n^0+\varepsilon_n)tdt$$

Принимая во внимание равенства $\Delta_0(\lambda_n^0)=0$, $\frac{d}{d\lambda}[\lambda\Delta_0(\lambda)]\Big|_{\lambda=\lambda_n^0}=\lambda_n^0\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)$, (9), (10) и (14), находим

$$\varepsilon_n=-\frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)+O(\varepsilon_n)}\int_0^\pi A(\pi,t)\sin(\lambda_n^0+\varepsilon_n)tdt=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)+O(\varepsilon_n)}\left[A(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}\Bigg|_0^{2a-\pi-0}+A(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}\Bigg|_{2a-\pi+0}^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\int_0^\pi A_t(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}dt\right]=\frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)+O(\varepsilon_n)}\left\{A(\pi,\pi)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)\pi}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}-\right.$$

$$\left.-\left[A(\pi,2a-\pi+0)-A(\pi,2a-\pi-0)\right]\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)(2a-\pi)}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}-\int_0^\pi A_t(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}_0(\lambda_n^0)}$$

$$\left\{\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)\pi}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta i}{4}\right)\int_0^\pi q(s)ds-\frac{\beta i}{4}\left(\int_a^\pi q(s)ds-\int_0^a q(s)ds\right)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)(2a-\pi)}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}-\right.$$

$$\left.-\int_0^\pi A_t(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}dt\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (15)$$

Покажем, что

$$\{\delta_n\}=\left\{\int_0^\pi A_t(\pi,t)\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)tdt\right\}\in l_2. \qquad (16)$$

Ясно, что интеграл $\int_0^\pi A_t(\pi,t)\cos\lambda tdt$ можно преобразовать к виду $\int_{-\pi}^\pi F(t)e^{i\lambda t}dt$, где $F(t)\in L_2(-\pi,\pi)$. Обозначим $p_n=\int_{-\pi}^\pi F(t)e^{i\sqrt{\lambda_n}\,t}dt$. Как в [11, с. 67] легко получить соотношение $p_n=2\pi c_n+g_n$, где

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi F(t)e^{int}dt,\ g_n=\sum_{k=1}^\infty\frac{(iH_n)^k}{k!}\int_{-\pi}^\pi F(t)t^ke^{int}dt.$$

Так как c_n – коэффициенты Фурье функции $F(t)$, то по равенству Парсеваля $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|^2dt<\infty$, т.е. $\{c_n\}\in l_2$. Далее, согласно неравенству Коши-Буняковского $|g_n|^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H^{2k}}{k!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left|\int_{-\pi}^{\pi}F(t)t^k e^{int}dt\right|^2$. Применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|g_n|^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H^{2k}}{k!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|F(t)t^k\right|^2dt\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H^{2k}}{k!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^{2k}}{2\pi k!}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|^2dt=\left(e^{H^2}-1\right)\frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi^2}-1\right)\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|^2dt<\infty.$$

Следовательно, $\{g_n\}\in l_2$. Значит, $\{p_n\}\in l_2$, т.е. справедливо (16). Тогда из (15) в силу (14) получаем

$$\varepsilon_n=\frac{1}{4\lambda_n^{02}\dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)}\left[(2-\beta i)\cos\lambda_n^0\pi\int_0^{\pi}q(s)\,ds-\beta i\left(\int_a^{\pi}q(s)\,ds-\int_0^{a}q(s)\,ds\right)\cos\lambda_n^0(2a-\pi)\right]+\frac{\alpha_n}{n},$$

$\{\alpha_n\}\in l_2$, т.е. имеет место (8). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lapwood F.R., Usami T. Free oscillation of the Earth. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981, 231 p.
2. Anderssen R.S. The effect of discontinuitiesin density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of tortional eigenfrequenciesof the Earth // Geophys. J.R. Astr. Soc., 1997, v. 50, p. 303-309.
3. Yurko V. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems // Integral Transforms and Special Functions, 2000, v. 10, № 2, p. 141-164.
4. Амиров Р.Х., Юрко В.А. О дифференциальных операторах с особенностью и условиями разрыва внутри интервала // Украинский матем. журнал, 2001, т. 53, № 11, с.1443-1457.
5. Freiling G., Yurko V. Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point // Inverse Problems, 2002, v. 18, p. 757-773.
6. Гусейнов И.М., Пашаев Р.Т. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка // Успехи матем. наук, 2002, т. 57, № 3, с.147-148.
7. Юрко В.А. Об обратных узловых и спектральных задачах для краевых задач с условиями разрыва внутри интервала // Изв. Саратовского ун-та, сер. Математика.Механика.Информатика, 2008, т. 8, в. 1, с. 31-35.
8. Ахмедова Э.Н., Гусейнов И.М. Об одной обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами // Изв. Саратовского ун-та, сер. Математика.Механика.Информатика, 2010, т. 10, в. 1, с. 3-9.
9. Akhmedova E.N., Huseynov H.M. On eigenvalues and eigenfuctions of one class of Sturm-Liouville operators with discontinuous coefficients // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2003, v. XXIII, p. 7-18.
10. Mammadova L.I. Representation of the solution of Sturm-Liouville equation with discontinuity conditions interior to interval // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2010, v. XXXIII, p. 127-136.

11. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.
12. Крейн М.Г., Левин Б.Я. О целых почти периодических функциях экспоненциального типа // ДАН СССР, 1949, т. 64, № 3, с. 285-287.

İNTERVAL DAXİLİNDƏ KƏSİLMƏ ŞƏRTLİ ŞTURM-LİUVİLL OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN XASSƏLƏRİ

H.M.HÜSEYNOV, L.İ.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Məqalə baxılan aralıq daxilində kəsilmə şərtlərinə malik olan Dirixle sərhəd şərtli Şturm-Liuvill operatorunun məxsusi ədədlərinin əsas xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Kəsilmə şərtində spektral parametr iştirak edir. Məxsusi ədədlərin həqiqiliyi və sadəliyi isbat edilmiş və onların asimptotikası alınmışdır.

Açar sözlər: Şturm-Liuvill operatoru, kəsilmə şərtləri, məxsusi ədədlər.

PROPERTIES OF THE EIGENVALUES OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH DISCONTINUITY CONDITIONS INSIDE THE INTERVAL

H.M.HUSEYNOV, L.I.MAMMADOVA

SUMMARY

The paper is devoted to the study of the main properties of the eigenvalues of the Sturm-Liouville operator with the Dirichlet boundary conditions and with the discontinuity conditions inside the interval. The discontinuity condition contains the spectral parameter. Reality and simplicity of the eigenvalues are proved, and their asymptotic estimates are obtained.

Key words: Sturm–Liouville operator, discontinuous conditions, eigenvalues.

Поступила в редакцию: 18.03.2011 г.
Принято к печати: 03.10.2011 г.